Números reales, intervalos y desigualdades

Fundamentos esenciales del precálculo

1. Los conjuntos numéricos y su organización

Los números naturales, enteros y racionales están contenidos en los reales. Si se adopta la convención de naturales positivos, estas inclusiones son

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}.$$

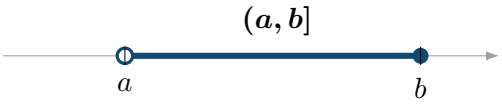
Todo racional puede escribirse como p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0$. Existen reales irracionales, como $\sqrt{2}$, que no admiten esa forma.

2. Intervalos y extremos

Para $a < b$ los intervalos abiertos, cerrados y semiabiertos se definen respectivamente mediante

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

El extremo se señala con un círculo vacío cuando no pertenece al conjunto y con uno relleno cuando sí pertenece. Los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ nunca son extremos incluidos.



3. Valor absoluto como distancia

La distancia entre x y a sobre la recta real es $|x - a|$. Para $r > 0$,

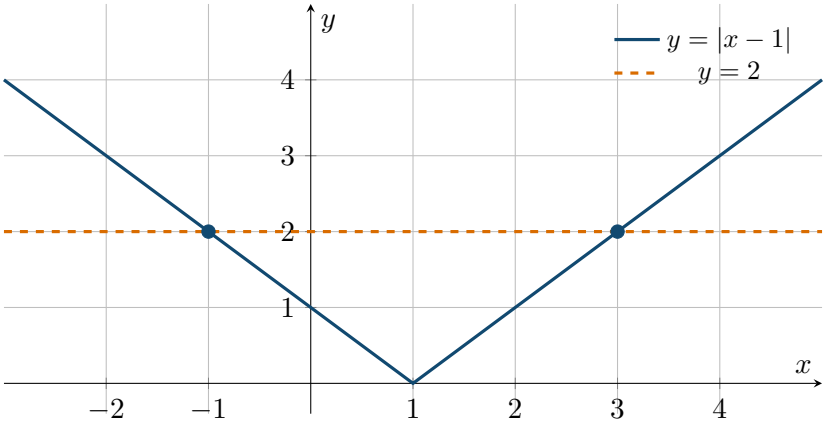
$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r,$$

$$|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r.$$

Por ejemplo, $|x - 1| \leq 2$ equivale a $-1 \leq x \leq 3$, de modo que su conjunto solución es $[-1, 3]$.

4. Visualización exacta

El gráfico de $y = |x - 1|$ permite verificar los extremos de la desigualdad anterior: la recta horizontal $y = 2$ corta a la función en $x = -1$ y $x = 3$.



La región donde la curva queda por debajo de la recta o sobre ella es precisamente $[-1, 3]$.

5. Desigualdades racionales y tabla de signos

Consideremos la desigualdad

$$\frac{x-2}{x+1} > 0, \qquad x \neq -1.$$

Los puntos que separan los intervalos de signo son -1 (denominador nulo) y 2 (numerador nulo). La fracción es positiva si numerador y denominador tienen el mismo signo:

$$\begin{aligned} x < -1: &\quad \frac{(-)}{(-)} = (+), \\ -1 < x < 2: &\quad \frac{(-)}{(+)} = (-), \\ x > 2: &\quad \frac{(+)}{(+)} = (+). \end{aligned}$$

Por tratarse de una desigualdad estricta, no incluimos 2; tampoco incluimos -1, porque allí la expresión no está definida.



Por tanto,

$$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty).$$

6. Errores que conviene evitar

No debemos multiplicar ambos miembros de una desigualdad por una expresión de signo desconocido sin separar casos. Tampoco podemos suponer que cancelar un factor del denominador hace válido el punto inicialmente excluido.

7. Comprobación final

Tomamos un valor de cada intervalo: para $x = -2$, la fracción vale $4 > 0$; para $x = 0$ vale $-2 < 0$; para $x = 3$ vale $1/4 > 0$. Estos valores confirman la tabla de signos, aunque la justificación completa procede del análisis de signos en cada intervalo.

8. Factorización y desigualdades polinómicas

Una factorización puede revelar los puntos donde cambia el signo de un polinomio. Por ejemplo,

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2).$$

Los ceros son $x = -2$ y $x = 3$. Como el coeficiente principal es positivo, la expresión es negativa entre ambas raíces y positiva fuera de ese intervalo. En consecuencia,

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \iff x \in [-2, 3].$$

La inclusión de ambos extremos se debe a que la desigualdad admite la igualdad. Este razonamiento requiere examinar los signos, no solo calcular las raíces.

9. Dominio de expresiones compuestas

En funciones racionales y radicales deben imponerse todas las restricciones simultáneamente. Para

$$h(x) = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 2}},$$

exigimos $x \neq -2$ y $(x - 1)/(x + 2) \geq 0$. Un análisis de signos separando los puntos -2 y 1 demuestra que el dominio es

$$\mathrm{Dom}(h) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty).$$

El punto $x = 1$ sí pertenece al dominio, pues el radicando se anula allí; $x = -2$ queda excluido porque el denominador vale cero.

10. Equivalencia frente a implicación

No todas las transformaciones se pueden invertir. De $x = 2$ se deduce $x^2 = 4$, pero de $x^2 = 4$ solo se deduce $x = 2$ o $x = -2$. Por ello,

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 4,$$

pero la recíproca no es válida sin una hipótesis adicional, como $x \geq 0$.