Funciones como lenguaje unificador

Dominio, imagen, transformaciones, composición, inversas y simetrías

Precálculo • Resumen integral razonado

Propósito. Comprender cómo una misma función se describe mediante expresiones, conjuntos, tablas y gráficas; operar con funciones conservando todas las condiciones de definición; y reconocer las consecuencias geométricas y algebraicas de transformar, componer e invertir.

1. La función y sus dos conjuntos fundamentales

Una *función* $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ asigna a cada $x \in D$ un único número real $f(x)$. El conjunto D se llama *dominio*; la *imagen* o recorrido es el conjunto de valores realmente alcanzados:

$$\mathrm{Dom}(f) = D, \qquad \mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in D\}.$$

Dos funciones con igual fórmula, pero diferentes dominios, no son necesariamente la misma función. En particular, indicar el dominio es una parte esencial de su definición.

1.1. Restricciones de dominio

Para funciones reales se examinan todas las condiciones a la vez:

- En $1/q(x)$, exigir $q(x) \neq 0$.
- En $\sqrt{u(x)}$, exigir $u(x) \geq 0$; si la raíz figura en un denominador, exigir $u(x) > 0$.
- En $\log_a u(x)$, exigir $u(x) > 0$, con $a > 0$ y $a \neq 1$.
- En una composición, conservar también el dominio de la función interior.

Ejemplo 1 (restricciones simultáneas). Determine el dominio de

$$F(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}.$$

La raíz requiere $4 - x^2 \geq 0$, esto es, $-2 \leq x \leq 2$; el denominador requiere $x \neq 1$. Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(F) = [-2, 1) \cup (1, 2].$$

En particular, $x = \pm 2$ está permitido: el numerador puede ser cero.

1.2. Imagen y diferencias con el dominio

Para $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ definida en $[-1, 3]$, se tiene $x - 1 \in [-2, 2]$; el cuadrado toma todos los valores en $[0, 4]$. En consecuencia,

$$\mathrm{Dom}(f) = [-1, 3], \qquad \mathrm{Im}(f) = [2, 6].$$

La imagen no se obtiene sustituyendo mecánicamente los extremos cuando hay máximos o mínimos interiores: aquí el mínimo se alcanza en $x = 1$.

2. Interpretación gráfica: puntos incluidos y excluidos

Un punto (a, b) pertenece a la gráfica de f exactamente cuando $a \in \mathrm{Dom}(f)$ y $f(a) = b$. Un círculo vacío expresa la exclusión de ese punto; uno lleno indica inclusión. Una curva puede aproximarse a una altura sin que el valor de la función coincida con ella.

Considere la función definida por partes

$$p(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

La rama izquierda se aproxima a $(0, 1)$ sin incluirlo; la derecha también se aproxima a ese punto, pero el valor real de la función es $p(0) = 2$.

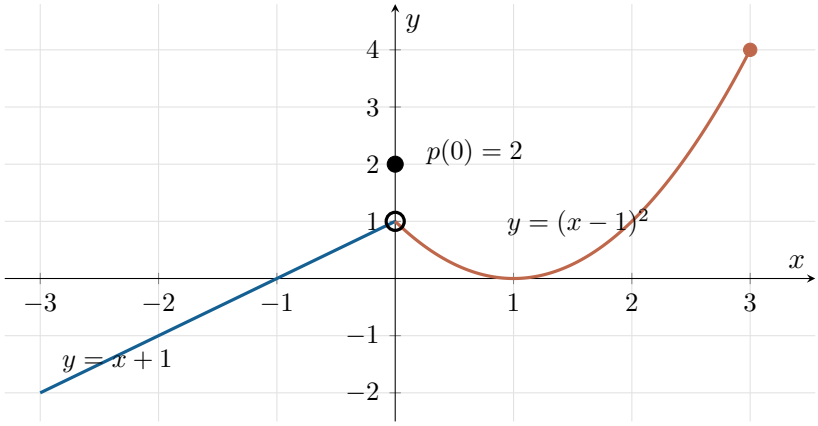


Figura 1. Dos ramas abiertas en $x = 0$, valor aislado $p(0) = 2$ y extremo incluido $p(3) = 4$.

El dominio es $(-\infty, 3]$. La rama izquierda produce $(-\infty, 1)$ y la derecha produce $[0, 4]$; junto con $p(0) = 2$ resulta

$$\mathrm{Im}(p) = (-\infty, 4].$$

Aunque ambas ramas se acercan a 1 cuando $x \to 0$, se cumple $p(0) \neq 1$. La gráfica distingue el comportamiento cercano del valor asignado.

3. Transformaciones de funciones

Sea f una función y definamos, para $b \neq 0$,

$$g(x) = a\, f\big(b(x - h)\big) + k.$$

El desplazamiento vertical es k, el horizontal es h, y los factores a y b producen cambios de escala y posibles reflexiones. Las coordenadas se transforman de manera exacta:

$$(t, f(t)) \longmapsto \left(h + \frac{t}{b},\, af(t) + k\right).$$

La fórmula anterior permite analizar simultáneamente las dimensiones del cambio, sin memorizar reglas contradictorias.

3.1. Correspondencia de dominios e imágenes

Si $D = \mathrm{Dom}(f)$ e $I = \mathrm{Im}(f)$, se tiene

$$\mathrm{Dom}(g) = \left\{ h + \frac{t}{b} : t \in D \right\}, \qquad \mathrm{Im}(g) = \{ay + k : y \in I\}.$$

Para $a = 0$, la imagen se reduce a $\{k\}$ siempre que el dominio no sea vacío. Si $b < 0$, además de la escala horizontal aparece una reflexión en torno al eje vertical de la curva de referencia.

3.2. Ejemplo 2 (traslación y escala)

Partimos de $f(x) = x^2$ y definimos $g(x) = 2(x-1)^2 + 1$. El vértice pasa de $(0,0)$ a $(1,1)$, la parábola conserva su apertura hacia arriba y sus valores verticales respecto del vértice se duplican.

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(g) = [1, \infty).$$

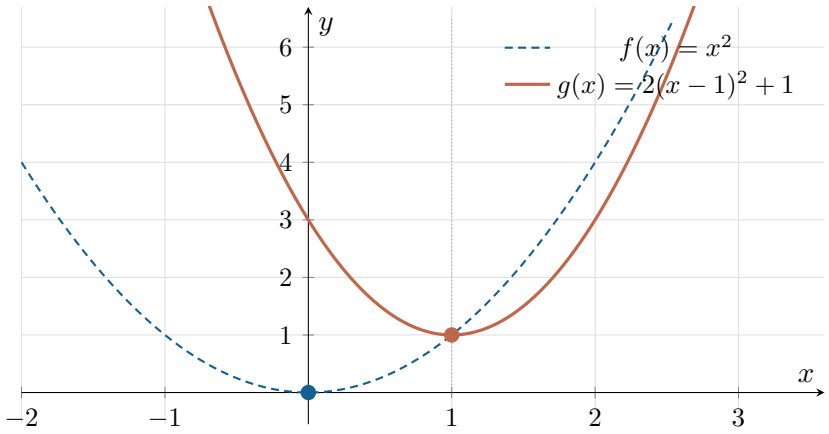


Figura 2. Gráficas exactas de la parábola base y una versión trasladada y estirada verticalmente.

3.3. Cuidado con el orden y los signos

$f(x-2)$ traslada la gráfica de f dos unidades *a la derecha*; $f(x+2)$ la traslada dos *a la izquierda*. En cambio, $f(x) + 2$ eleva cada punto dos unidades. Una reflexión vertical es $-f(x)$, mientras que $f(-x)$ es una reflexión horizontal.

4. Composición: primero actúa la función interior

Para $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ y $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, la composición de f con g se define mediante

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \qquad \mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

La condición $x \in D_g$ *no* puede descartarse, aunque posteriormente la expresión obtenida se simplifique. En general, $f \circ g \neq g \circ f$.

4.1. Ejemplo 3 (el orden cambia incluso el dominio)

Sean $f(x) = \sqrt{x-1}$, definida para $x \geq 1$, y $g(x) = 3 - x^2$, definida para todo real. Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \sqrt{(3-x^2)-1} = \sqrt{2-x^2},\\ \mathrm{Dom}(f \circ g) &= [-\sqrt{2}, \sqrt{2}],\\ (g \circ f)(x) &= 3 - (\sqrt{x-1})^2 = 4 - x,\\ \mathrm{Dom}(g \circ f) &= [1, \infty).\end{aligned}$$

La expresión $4 - x$ por sí sola parece definida para todos los reales, pero como composición $g \circ f$ conserva la restricción $x \geq 1$. Por ejemplo, $x = 0$ no es una entrada válida para $g \circ f$.

4.2. Ejemplo 4 (simplificar no restaura puntos)

Sea

$$r(t) = \frac{t^2 - 1}{t - 1}, \quad t \neq 1, \qquad q(x) = x + 1.$$

Entonces $(r \circ q)(x) = x + 2$, *únicamente para* $x \neq 0$: la entrada $q(0) = 1$ está prohibida para r. La expresión simplificada no elimina ese punto excluido.

5. Funciones inversas e inyectividad

Una función $f\colon D \to I$, con $I = \mathrm{Im}(f)$, admite una función inversa $f^{-1}\colon I \to D$ exactamente cuando f es *inyectiva*: $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. En tal caso,

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in D), \qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad (y \in I).$$

Geométricamente, los puntos (x, y) de la gráfica de f corresponden a los puntos (y, x) de la gráfica de f^{-1}; ambas son reflejos respecto de $y = x$.

5.1. Ejemplo 5 (restringir para invertir)

En $\mathbb{R}$, la función $x \mapsto x^2$ no es inyectiva, pues $2^2 = (-2)^2$. Si fijamos $f(x) = x^2$ con dominio $[0, \infty)$, entonces sí es estrictamente creciente, su imagen es $[0, \infty)$ y

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{para } x \geq 0.$$

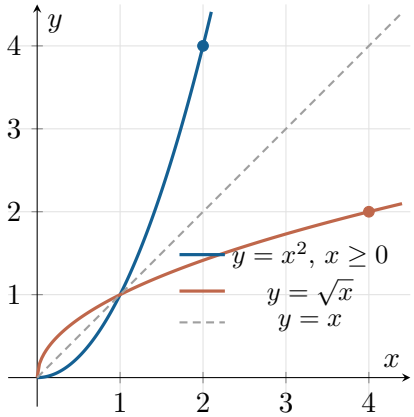


Figura 3. Inversas sobre $[0, \infty)$*: los puntos* $(2, 4)$ *y* $(4, 2)$ *se intercambian.*

5.2. Ejemplo 6 (inversa racional con dominios explícitos)

Considere $f(x) = (2x-3)/(x+4)$, con $x \neq -4$. Si $y = f(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y(x+4) &= 2x-3, \\ x(y-2) &= -3-4y, \\ x &= \frac{4y+3}{2-y}. \end{aligned}$$

Para justificar que esta expresión es una inversa, observemos que $f(x) \neq 2$ para todo $x \neq -4$, pues $(2x-3)/(x+4) = 2$ implicaría $-3 = 8$. Además, para todo $y \neq 2$, la expresión $(4y+3)/(2-y)$ produce un único real $x \neq -4$; de hecho, imponer $x = -4$ llevaría a $3 = -8$. Por tanto

$$f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2-x}, \quad x \neq 2, \qquad \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Como prueba directa, $f(0) = -3/4$ y $f^{-1}(-3/4) = 0$. Recuerde que f^{-1} representa la *función inversa*, no el recíproco $1/f$.

6. Simetría de funciones y sus dominios

Una función es *par* si el dominio es simétrico respecto de 0 y $f(-x) = f(x)$ para todo x de su dominio. Es *impar* si ese dominio es simétrico y $f(-x) = -f(x)$ en todos sus puntos. Las gráficas muestran, respectivamente, simetría respecto del eje vertical o respecto del origen.

$$\begin{aligned} \text{Par:} \quad & f(x) = x^2, && f(-x) = x^2 = f(x). \\ \text{Impar:} \quad & g(x) = x^3, && g(-x) = -x^3 = -g(x). \end{aligned}$$

La simetría de la fórmula no basta por sí sola: $f(x) = x^2$ restringida a $[0, \infty)$ no es una función par ni impar, porque su dominio no es simétrico respecto de 0.

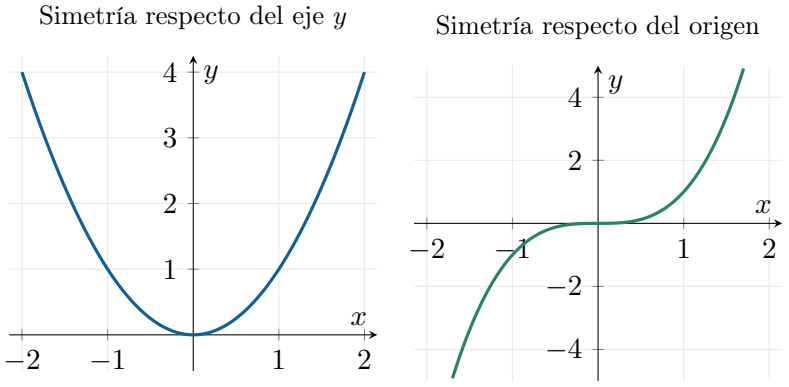


Figura 4. Una función par y una impar, definidas ambas en todo $\mathbb{R}$.

7. Síntesis: dominio, imagen y continuidad entre tramos

Definamos

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}, & -2 \le x < 2, \\ (x-1)^2 + 1, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Paso 1: dominio. Los tramos cubren exactamente $[-2, 4]$; el primero requiere $x \ge -2$ y el segundo está explícitamente restringido a $[2, 4]$. Por tanto $\mathrm{Dom}(h) = [-2, 4]$.

Paso 2: imagen. En $[-2, 2)$ la raíz es estrictamente creciente y su imagen es $[0, 2)$. En $[2, 4]$, $x - 1 \in [1, 3]$, de modo que $(x-1)^2 + 1 \in [2, 10]$. Las dos imágenes se unen sin dejar hueco:

$$\mathrm{Im}(h) = [0, 2) \cup [2, 10] = [0, 10].$$

Paso 3: comportamiento en la unión. El límite desde la izquierda es $\sqrt{2+2} = 2$, y $h(2) = (2-1)^2 + 1 = 2$. El límite desde la derecha también vale 2; por tanto, h es continua en $x = 2$.

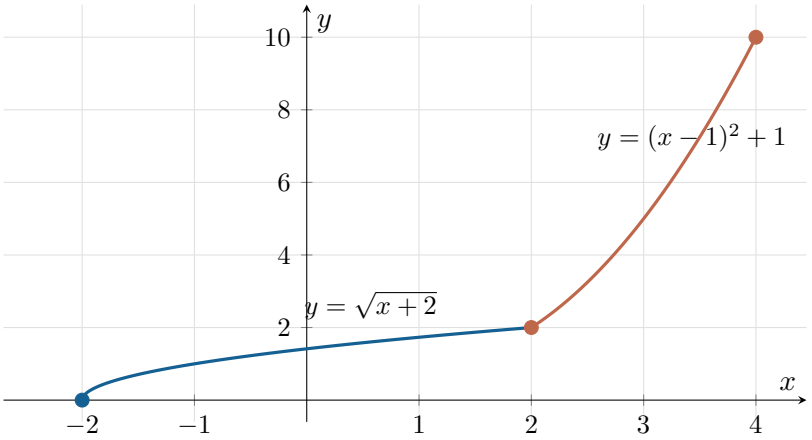


Figura 5. Ambas ramas se encuentran en $(2, 2)$; ese punto queda incluido por el segundo tramo.

8. Errores frecuentes y cómo detectarlos

1. **Ignorar las restricciones de entrada.** La simplificación $(x^2 - 1)/(x - 1) = x + 1$ solo vale para $x \neq 1$.
2. **Confundir dominio e imagen.** El dominio recoge las entradas permitidas; la imagen, las salidas alcanzadas.
3. **Invertir sin inyectividad.** Si dos entradas producen una salida común, la relación inversa no determina una única salida sin restringir el dominio.
4. **Omitir extremos de ramas.** En una función por tramos, $x = a$ corresponde exclusivamente a los tramos cuyas desigualdades incluyen el signo $=$.
5. **Confundir f^{-1} con $1/f$.** La primera, si existe, deshace la función; la segunda divide 1 entre sus valores no nulos.
6. **Olvidar que el dominio debe ser simétrico.** No basta comprobar $f(-x) = f(x)$ en los puntos donde ambas expresiones resultan calculables.

9. Práctica breve con resultados justificados

A. Si $f(x) = \sqrt{5-2x}$ y $g(x) = x^2$, determine $\mathrm{Dom}(f \circ g)$. Como $5 - 2x^2 \geq 0$, se obtiene $[-\sqrt{5/2}, \sqrt{5/2}]$.

B. Sea $q(x) = |x+2| - 3$. Su mínimo es -3 (en $x = -2$), por lo que $\mathrm{Im}(q) = [-3, \infty)$; la gráfica de $|x|$ se desplaza dos unidades a la izquierda y tres hacia abajo.

C. Para $r(x) = 3x - 5$ definida en $\mathbb{R}$, despejar $y = 3x - 5$ da $x = (y+5)/3$. Por tanto $r^{-1}(x) = (x+5)/3$, definida en todo $\mathbb{R}$.

D. Si $u(x) = 1/x$, con $x \neq 0$, entonces $u(-x) = -u(x)$; el dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ también es simétrico. La función es impar.

E. Una función puede tener inversa sin ser creciente en todo su dominio: basta ser inyectiva; para funciones continuas definidas en un intervalo, la estricta monotonía proporciona un criterio útil de inyectividad.

10. Ideas para recordar

- La función incluye una regla y un conjunto de entradas permitidas.
- El recorrido se determina por los valores realmente alcanzados, no solo por los extremos del dominio.
- En una transformación $af(b(x-h)) + k$, los puntos se transforman como $(t, f(t)) \mapsto (h + t/b, af(t) + k)$.
- La composición requiere $x \in \mathrm{Dom}(g)$ y $g(x) \in \mathrm{Dom}(f)$.
- Una inversa existe como función exactamente cuando la función original es inyectiva sobre el dominio elegido.
- Los extremos abiertos y cerrados son información matemática, no detalles ornamentales.