Funciones polinómicas y racionales

Raíces, multiplicidades, discontinuidades y asíntotas

Precálculo • Síntesis razonada de conceptos y métodos

Objetivo. Comprender cómo la factorización determina las raíces y sus multiplicidades, cómo el análisis de grados y cocientes describe las gráficas, y por qué simplificar una fracción algebraica nunca restituye los valores prohibidos de su dominio.

1. Funciones polinómicas: estructura y comportamiento

Un *polinomio real* es una función

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$ es el *grado* y a_n el *coeficiente principal*. Su dominio es $\mathbb{R}$; además, su gráfica es continua, sin huecos ni asíntotas verticales.

1.1. Comportamiento en los extremos

Cuando $|x|$ crece, el término $a_n x^n$ determina el signo y la tendencia de $P(x)$. Para $a_n > 0$, un grado par hace que ambos extremos suban y un grado impar hace que la izquierda baje y la derecha suba. Con $a_n < 0$ las direcciones se invierten. Esta regla describe los extremos, pero no determina por sí sola todas las ondulaciones interiores.

1.2. Raíces, factor y multiplicidad

Un número c es *raíz* de P cuando $P(c) = 0$. El teorema del factor establece

$$P(c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P(x) = (x - c)Q(x) \quad \text{para algún polinomio } Q.$$

La demostración utiliza el algoritmo de división: existen Q y un resto constante r tales que $P(x) = (x - c)Q(x) + r$. Al sustituir $x = c$ obtenemos $r = P(c)$; por ello, el resto es nulo exactamente cuando $x - c$ divide a $P(x)$.

Si $P(x) = (x - c)^m Q(x)$ con $Q(c) \neq 0$, el entero $m \geq 1$ se llama *multiplicidad* de c. Cerca de c, el factor $Q(x)$ mantiene su signo; así, si m es impar la gráfica *atraviesa* el eje horizontal, mientras que si m es par *toca* el eje sin cambiar de signo. Esta conclusión se refiere al comportamiento local.

2. Un polinomio con raíces de distinta multiplicidad

Considere

$$P(x) = (x + 2)^2(x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Las raíces son $x = -2$ (multiplicidad 2) y $x = 1$ (multiplicidad 1). Por la factorización, $P(x)$ tiene el mismo signo que $x - 1$ para $x \neq -2$: es negativo a ambos lados de -2 y positivo después de 1. En $x = -2$ y $x = 1$ vale cero.

El grado es 3 y el coeficiente principal es positivo: $P(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$, y $P(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$. Asimismo $P(0) = -4$.

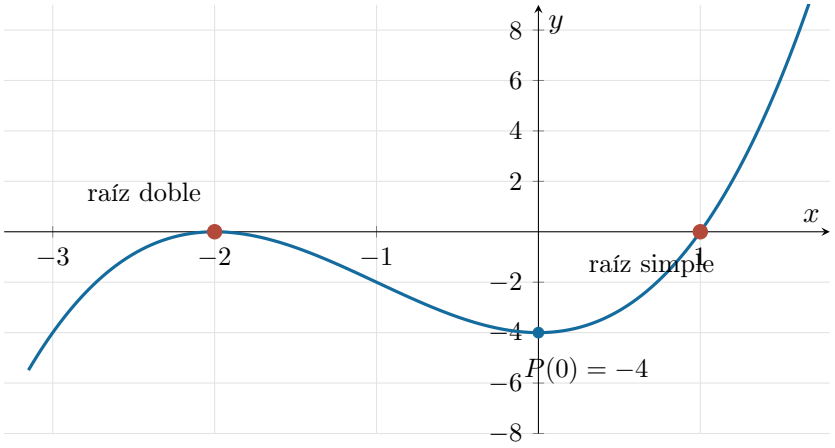


Figura 1. El factor $(x+2)^2$ produce contacto sin cruce en -2; el factor $x-1$ produce cruce en 1.

Comprobación adicional. Derivando (en un curso posterior se estudiará el método en detalle), $P'(x) = 3x(x+2)$. Los puntos estacionarios -2 y 0 confirman el máximo local $(-2, 0)$ y el mínimo local $(0, -4)$ observados en el gráfico.

3. Factorización a partir de una raíz conocida

Dado el polinomio $Q(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, probamos $x = -1$:

$$Q(-1) = -1 - 4 - 1 + 6 = 0.$$

Entonces $x + 1$ divide a Q. La división algebraica da $Q(x) = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$. Como $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, resulta

$$Q(x) = (x+1)(x-2)(x-3).$$

De aquí se obtienen las tres raíces distintas -1, 2 y 3. Comprobación: expandir el producto recupera exactamente $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Precaución. Una raíz repetida cuenta varias veces en la factorización, pero representa un solo corte con el eje x; un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales distintas.

4. Funciones racionales y dominio

Una *función racional* tiene la forma

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}, \qquad \text{con } D(x) \neq 0,$$

donde N y D son polinomios, D no es el polinomio nulo y el dominio natural es

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in \mathbb{R} : D(x) \neq 0\}.$$

Para interpretar su gráfica se estudian ceros del numerador, ceros del denominador, factores comunes, asíntotas y comportamiento por intervalos.

4.1. Simplificar no amplía el dominio

Sea

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}.$$

El denominador original se anula en $x = -1$ y $x = 2$. Por tanto, $\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ y únicamente para $x \neq -1, 2$ se cumple

$$R(x) = \frac{x-1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

El valor $x = -1$ no reaparece al cancelar $x + 1$: allí la fracción original es $0/0$ y no está definida. La expresión reducida *permite calcular la altura del hueco*, pero no rellenarlo:

$$\left.\frac{x-1}{x-2}\right|_{x=-1} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

En cambio, al aproximarse a $x = 2$ el término $1/(x-2)$ crece sin cota. La diferencia es geométricamente esencial: hay un hueco en $(-1, 2/3)$ y una asíntota vertical en $x = 2$.

5. Gráfica exacta: hueco y dos asíntotas

Para la función R precedente, $x = 2$ es una asíntota vertical y $y = 1$ es una asíntota horizontal, pues $R(x) = 1 + 1/(x-2)$ para los valores admitidos. No existen otros puntos de dominio prohibidos.

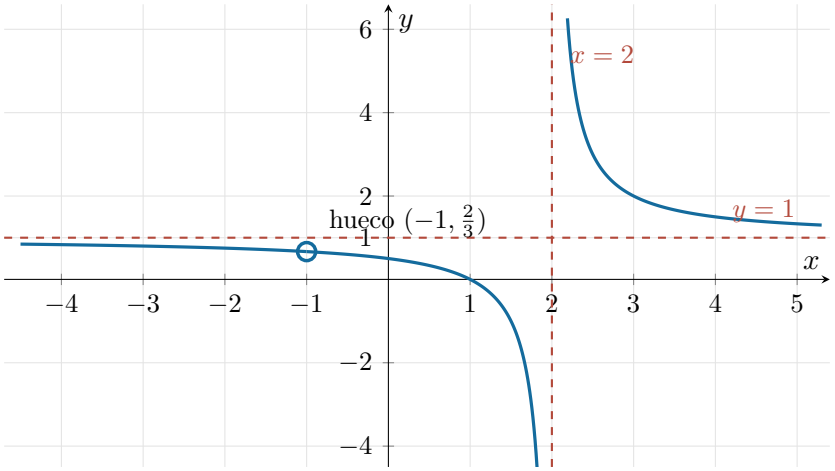


Figura 2. El círculo vacío excluye $x = -1$; las rectas discontinuas señalan asíntotas diferentes.

La ecuación $R(x) = y$ equivale (para $x \neq 2$) a $x = 2 + 1/(y-1)$ si $y \neq 1$. Esa expresión toma el valor prohibido $x = -1$ únicamente cuando $y = 2/3$. Por ello, su *imagen* es

$$\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{2}{3}\right\}.$$

No basta excluir de la imagen la altura de la asíntota horizontal: también debe excluirse la del hueco si no se alcanza en otro punto.

6. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas

Una recta $x = c$ es una *asíntota vertical* cuando al menos uno de los límites laterales de la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$ al aproximarse a c. Un cero del denominador no implica automáticamente una asíntota: los factores comunes pueden originar huecos, y el tipo de singularidad debe examinarse tras la reducción con el dominio original conservado.

Para una función racional $N(x)/D(x)$, con grados n y m y coeficientes principales a_n, b_m, el comportamiento para $|x|$ grande permite establecer lo siguiente:

- Si $n < m$, la asíntota horizontal es $y = 0$.
- Si $n = m$, la asíntota horizontal es $y = a_n/b_m$.
- Si $n = m + 1$, se divide N entre D: el cociente lineal $y = mx + b$ es una asíntota oblicua.
- Si $n > m+1$, puede existir una asíntota polinómica de grado superior, aunque no una horizontal u oblicua del cociente entero.

Estas reglas estudian el comportamiento hacia $x \to \pm\infty$ y no determinan, por sí solas, todas las discontinuidades interiores.

6.1. Asíntota oblicua por división

Estudie

$$S(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1.$$

La división exacta proporciona $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$, y por tanto

$$S(x) = x + 1 + \frac{2}{x - 1}.$$

Como $2/(x - 1) \to 0$ si $x \to \pm\infty$, la recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua. Además, $x = 1$ es vertical porque el numerador vale 2 allí: no hay factor cancelable.

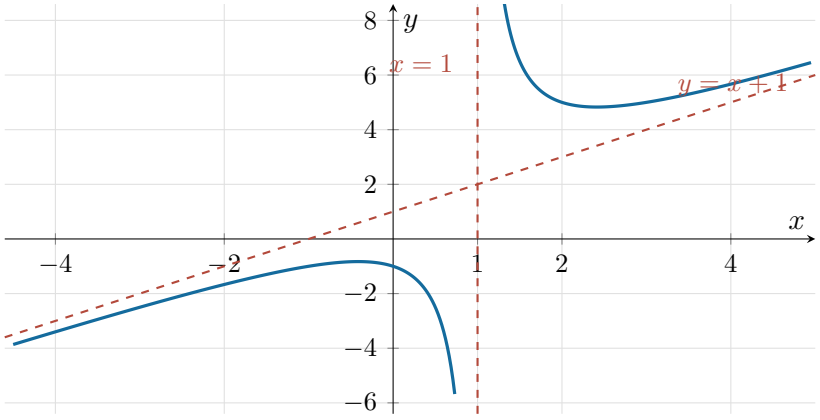


Figura 3. La curva se aproxima a la recta $y = x + 1$ en ambos extremos; $x = 1$ es una asíntota vertical.

7. Signos de una función racional con un hueco

Regresemos a $R(x) = (x-1)/(x-2)$ *con* las restricciones originales $x \neq -1, 2$. Para resolver $R(x) > 0$ determinamos los signos a cada lado del cero 1 y del polo 2:

Intervalo	$x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{x-1}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

El punto $x = -1$ pertenece a la región donde el signo sería positivo en la fórmula simplificada, *pero no* al dominio original. El punto 1 se excluye porque la desigualdad es estricta y $R(1) = 0$; el punto 2 porque el denominador se anula.

$$\{x \in \mathrm{Dom}(R) : R(x) > 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (2, \infty).$$



Figura 4. En azul, los intervalos donde $R(x) > 0$; los tres puntos señalados se excluyen por razones distintas.

8. Clasificación de singularidades removibles

Compare las expresiones

$$A(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad B(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad C(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4}.$$

Para $x \neq 2$, $A(x) = x+2$. Presenta un hueco en $(2, 4)$, no una asíntota vertical. La función B tiene asíntota vertical en $x = 2$ porque su magnitud diverge al aproximarse a ese punto. En cambio $C(x) = 1$ solo cuando $x \neq -2, 2$: presenta *dos huecos*, uno en $(-2, 1)$ y otro en $(2, 1)$, y no tiene asíntotas verticales. Esta comparación confirma que el dominio procede siempre de la expresión original.

9. Errores frecuentes y correcciones

1. **Cancelar y volver a incluir el cero.** De $\frac{(x-a)U(x)}{(x-a)V(x)} = \frac{U(x)}{V(x)}$ se obtiene igualdad únicamente para los x admitidos por la fracción original.
2. **Confundir cruce y contacto.** La paridad de la multiplicidad determina si el signo cambia localmente alrededor de la raíz; dibujar una curva que cruza una raíz doble contradice la factorización.
3. **Suponer que todo denominador nulo genera polo.** Si el factor desaparece tras cancelar, puede originarse una discontinuidad removible.
4. **Confundir asíntota con frontera prohibida.** Una función puede cruzar su asíntota horizontal u oblicua en puntos finitos; la noción se refiere a límites.
5. **Omitir los puntos excluidos de tablas de signos.** Una fórmula reducida no incorpora automáticamente las restricciones que se perdieron en el cálculo.

10. Práctica de consolidación con respuestas

1. Raíces y signos. Sea $F(x) = (x-3)^2(x+1)$. Sus raíces son 3 (doble) y -1 (simple). Como $(x-3)^2 > 0$ excepto en 3, $F(x) > 0$ exactamente para $x \in (-1,3) \cup (3,\infty)$. En $x = -1$ y $x = 3$ vale cero.

2. Hueco y asíntota. Para

$$G(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)},$$

la expresión inicial exige $x \neq 3, -1$. Su reducción es $(x+3)/(x+1)$ solo en ese dominio; tiene un hueco en $(3, 3/2)$, asíntota vertical $x = -1$ y horizontal $y = 1$.

3. Rango de una función con hueco. Para $H(x) = (x^2-1)/(x-1)$ con $x \neq 1$, se tiene $H(x) = x+1$ en $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. La gráfica es la recta $y = x+1$ sin el punto $(1,2)$, así que $\mathrm{Im}(H) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.

4. División y asíntota. La división de $2x^2 + x + 1$ entre $x + 1$ da $2x - 1$ y resto 2, pues $(x+1)(2x-1)+2 = 2x^2+x+1$. Por tanto, $y = 2x-1$ es asíntota oblicua de $(2x^2+x+1)/(x+1)$, y $x = -1$ es vertical.

11. Síntesis final

- La factorización de un polinomio revela raíces, multiplicidades y signos locales; el término principal explica sus extremos.
- El teorema del factor conecta divisibilidad algebraica y ceros de la función.
- Una función racional conserva para siempre las exclusiones del denominador original, incluso después de reducir factores.
- Los huecos se representan mediante puntos abiertos; las asíntotas verticales y las asíntotas al infinito describen comportamientos distintos.
- Para estudiar una gráfica se combinan dominio, intersecciones, signos, asíntotas y ejemplos comprobados.