Modelos exponenciales y logarítmicos

Propiedades, gráficas, ecuaciones y aplicaciones

Precálculo • Resumen integral con ejemplos razonados

Propósito. Entender cómo las potencias y los logaritmos describen fenómenos de variación multiplicativa, reconocer sus condiciones de validez, interpretar sus gráficas como funciones inversas y resolver ecuaciones sin perder restricciones del dominio.

1. Potencias de base positiva: fundamentos

Para una base $a > 0$, las potencias a^x están bien definidas como números reales positivos para todo $x \in \mathbb{R}$. Si m, n son enteros y $n \geq 1$, las potencias racionales se interpretan como

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}.$$

La hipótesis $a > 0$ permite extender coherentemente estas leyes a exponentes reales sin ambigüedades de signos ni raíces. Para $a, b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$, se cumplen

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$
$$(a^x)^y = a^{xy}, \qquad (ab)^x = a^x b^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \qquad a^0 = 1.$$

La identidad $a^0 = 1$ exige $a \neq 0$; en este capítulo siempre suponemos $a > 0$. Además, $a^{-x} = 1/a^x$ y $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. No es válido sustituir $(a+b)^x$ por $a^x + b^x$ en general: por ejemplo, $(2+3)^2 = 25$, mientras que $2^2 + 3^2 = 13$.

1.1. De una potencia a otra de la misma base

Ejemplo:

$$\frac{2^{x+3}\, 2^{2x-1}}{2^{x+1}} = 2^{(x+3)+(2x-1)-(x+1)} = 2^{2x+1}.$$

En este cálculo las reglas se aplican a *productos* y *cocientes* de potencias; las sumas de potencias requieren métodos distintos.

2. La función exponencial

Sea $a > 0$, $a \neq 1$. La función $f(x) = a^x$ tiene

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(f) = (0, +\infty), \qquad f(0) = 1.$$

Es continua, inyectiva y presenta asíntota horizontal $y = 0$. Si $a > 1$, es estrictamente creciente; si $0 < a < 1$, es estrictamente decreciente. La condición $a \neq 1$ es decisiva: $1^x = 1$ no es inyectiva y carece de inversa definida en todo su recorrido.

Por qué cambia la monotonía. Para $x_2 > x_1$ tenemos

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}.$$

Si $a > 1$, el cociente es mayor que 1, mientras que, si $0 < a < 1$, es menor que 1. Como ambas potencias son positivas, queda determinado el orden de los valores.

2.1. Crecimiento frente a decrecimiento

Las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$ pasan por $(0, 1)$. Sus valores ilustran la reflexión respecto del eje vertical:

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

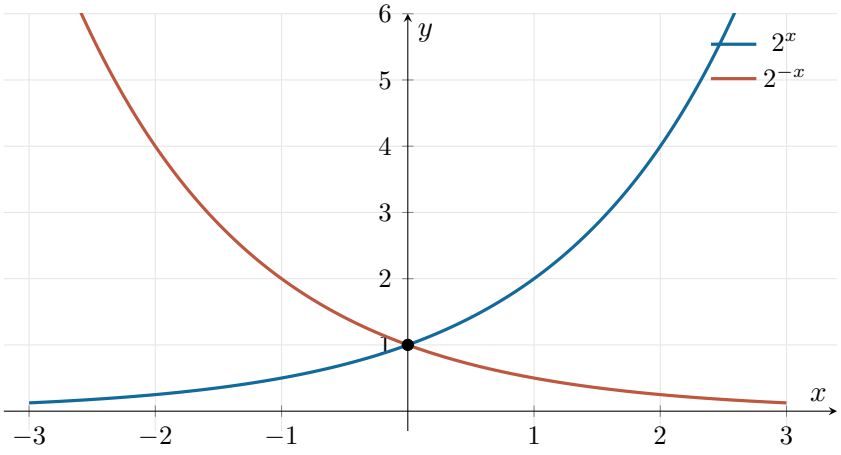


Figura 1. Crecimiento y decrecimiento exponenciales con el mismo valor inicial.

3. Transformaciones de gráficas exponenciales

Si $a > 1$ y $A \neq 0$, la expresión

$$G(x) = A\,a^{\,x-h} + k$$

traslada horizontalmente la función por h, la escala verticalmente por $|A|$ y la desplaza verticalmente por k. Si $A < 0$, también hay una reflexión respecto de la horizontal del sistema original. Su asíntota horizontal es $y = k$, el dominio es $\mathbb{R}$ y el recorrido es $(k, +\infty)$ si $A > 0$, o $(-\infty, k)$ si $A < 0$.

Ejemplo. Considere $G(x) = 2^{x-1} + 1$. La asíntota es $y = 1$, el recorrido es $(1, +\infty)$ y se tienen los puntos exactos

$$G(0) = \tfrac{3}{2}, \qquad G(1) = 2, \qquad G(2) = 3.$$

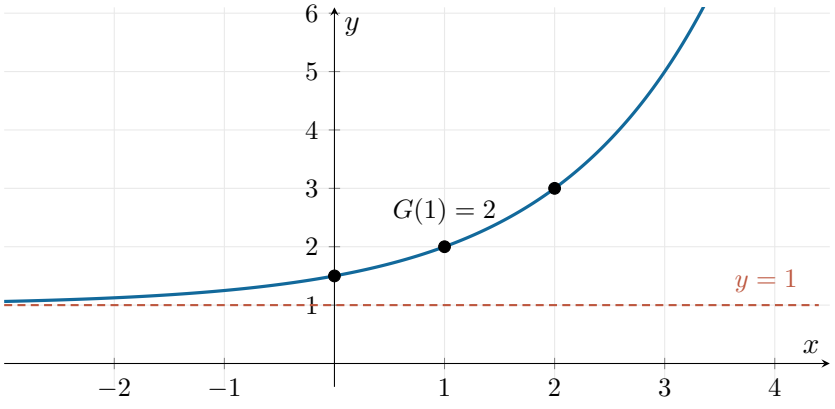


Figura 2. El desplazamiento mantiene la forma exponencial y traslada su asíntota.

4. El logaritmo: inversa de la exponencial

Sean $a > 0$, $a \neq 1$. Para $x > 0$, definimos $\log_a x$ como el único exponente y que satisface $a^y = x$:

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x, \qquad x > 0.$$

La recíproca entre las funciones se expresa como

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0), \qquad \log_a(a^t) = t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Por tanto,

$$\mathrm{Dom}(\log_a) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}.$$

La gráfica pasa por $(1, 0)$ y $(a, 1)$, y tiene asíntota vertical $x = 0$. Es creciente para $a > 1$ y decreciente para $0 < a < 1$. Se usan especialmente $\ln x = \log_e x$, con $e \approx 2.71828$, y $\log_{10} x$.

4.1. Leyes de los logaritmos y sus hipótesis

Para $a > 0$, $a \neq 1$ y $u, v > 0$, se cumplen

$$\begin{aligned}
\log_a(uv) &= \log_a u + \log_a v, \\
\log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a u - \log_a v, \\
\log_a(u^r) &= r \log_a u \qquad (r \in \mathbb{R}), \\
\log_a u &= \frac{\ln u}{\ln a} = \frac{\log_b u}{\log_b a} \quad (b > 0,\ b \neq 1).
\end{aligned}$$

La demostración de la ley del producto se obtiene al escribir $u = a^s$ y $v = a^t$: como $uv = a^{s+t}$, su logaritmo es $s + t$. Las demás leyes se deducen de la misma correspondencia.

Atención al dominio. No existe una regla general $\log_a(u + v) = \log_a u + \log_a v$. Por ejemplo, $\log_2(2 + 2) = 2$, mientras que $\log_2 2 + \log_2 2 = 2$ ocurre por casualidad; con $u = 2, v = 4$ los lados son $\log_2 6$ y 3, claramente distintos.

Una sutileza útil. $\log_a(u^2) = 2 \log_a |u|$ para $u \neq 0$, pero $2 \log_a u$ solo tiene sentido real cuando $u > 0$. La expresión con valor absoluto evita una sustitución inválida.

5. Las gráficas de funciones inversas

Si $f(x) = 2^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_2 x$. Las gráficas son imágenes especulares respecto de $y = x$: los pares $(0, 1)$, $(1, 2)$ de la primera corresponden a $(1, 0)$, $(2, 1)$ de la segunda.

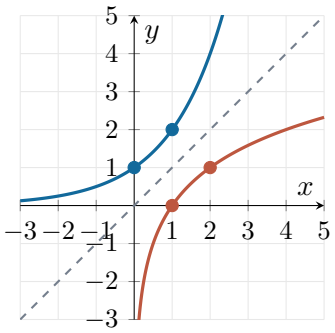


Figura 3. Azul: 2^x; rojo: $\log_2 x$; línea discontinua: $y = x$. La reflexión transforma la asíntota horizontal $y = 0$ en la vertical $x = 0$.

5.1. Logaritmos transformados

Para $H(x) = \log_2(x-1) + 2$, la condición obligatoria es $x - 1 > 0$. Por ello,

$$\mathrm{Dom}(H) = (1, +\infty), \quad \mathrm{Im}(H) = \mathbb{R}, \quad \text{asíntota vertical } x = 1.$$

Se cumple $H(2) = 2$, $H(3) = 3$, y su único corte con el eje horizontal satisface

$$0 = \log_2(x-1) + 2 \iff x - 1 = 2^{-2} \iff x = \tfrac{5}{4}.$$

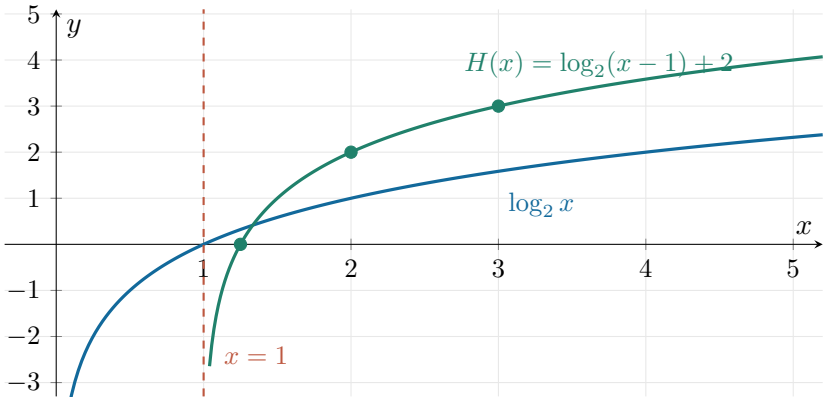


Figura 4. Una traslación horizontal modifica el dominio y mueve la asíntota vertical.

6. Ecuaciones exponenciales: tres estrategias

6.1. Bases iguales

Las funciones exponenciales con base válida son inyectivas. Por tanto,

$$5^{2x-1} = 125 = 5^3 \iff 2x - 1 = 3 \iff \boldsymbol{x = 2}.$$

La comprobación directa es $5^{2(2)-1} = 5^3 = 125$.

6.2. Usar logaritmos cuando las bases no coinciden

Para $2^{x+1} = 7$, ambos lados son positivos y se puede aplicar el logaritmo:

$$(x+1)\ln 2 = \ln 7 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x = \frac{\ln 7}{\ln 2} - 1}.$$

La solución es única porque 2^{x+1} crece estrictamente. Usar $\ln 2 \neq 0$ evita dividir por cero.

6.3. Sustitución exponencial

Resolvamos

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Al poner $t = 3^x > 0$, la ecuación pasa a $t^2 - 10t + 9 = 0$, es decir,

$$(t-1)(t-9) = 0 \iff t = 1 \text{ o } t = 9.$$

Volviendo a la variable original: $3^x = 1$ da $x = 0$, y $3^x = 9$ da $x = 2$. Ambas soluciones satisfacen la ecuación inicial, de modo que

$$\boldsymbol{S = \{0, 2\}}.$$

7. Ecuaciones logarítmicas y soluciones extrañas

7.1. Combinar logaritmos sin perder el dominio

Resolveremos

$$\log_3(x-1)+\log_3(x+1)=2.$$

El dominio inicial exige $x-1>0$ y $x+1>0$, en conjunto $x>1$. En ese dominio, por la ley del producto,

$$\log_3((x-1)(x+1))=2 \iff x^2-1=9 \iff x=\pm\sqrt{10}.$$

Solo $\sqrt{10}>1$ cumple las restricciones; $-\sqrt{10}$ debe rechazarse, aunque satisface la ecuación algebraica intermedia. Por tanto,

$$\boldsymbol{S=\{\sqrt{10}\}}.$$

Comprobación: $(\sqrt{10}-1)(\sqrt{10}+1)=9$, por lo que la suma de los logaritmos efectivamente es $\log_3 9=2$.

7.2. Una suma que se convierte en producto

En $\log_2(x+2)=3-\log_2 x$, el dominio exige $x>0$. Sumando $\log_2 x$ y reuniendo términos:

$$\log_2\big(x(x+2)\big)=3 \iff x^2+2x=8 \iff (x-2)(x+4)=0.$$

La única solución admisible es $x=2$; $x=-4$ no pertenece al dominio de partida.

8. Desigualdades y sentido del orden

Para $a>1$, tanto a^x como $\log_a x$ conservan el orden; cuando $0<a<1$, ambas lo invierten. Esto permite resolver sin tomar decisiones ambiguas sobre signos:

$$\begin{aligned}
2^x \geq 8=2^3 &\iff x\geq 3,\\
\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^3 &\iff x<3,\\
\log_2(x-1)<3 &\iff 0<x-1<8 \iff 1<x<9,\\
\log_{1/2}(x-1)\leq \log_{1/2}3 &\iff x-1\geq 3 \iff x\geq 4.
\end{aligned}$$

Dominio mixto. Para que $\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right)$ sea real se exige

$$\frac{x-1}{x+3}>0 \qquad (x\neq -3).$$

La tabla de signos de numerador y denominador conduce al conjunto

$$\boldsymbol{\mathrm{Dom}=(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)}.$$

Aquí $x=1$ está excluido porque produciría argumento cero y $x=-3$ porque anularía el denominador.

9. Modelos de crecimiento y decrecimiento

9.1. Cambio porcentual por periodo

Si una cantidad inicial $P_0 > 0$ cambia una proporción fija $r > -1$ por unidad de tiempo y el modelo se interpreta como compuesto, entonces

$$P(t) = P_0(1+r)^t \qquad (t \geq 0).$$

Si $r > 0$, el modelo crece; si $-1 < r < 0$, decrece; si $r = 0$, permanece constante. Si el cambio ocurre exclusivamente al finalizar cada periodo, se evalúa en tiempos enteros $t \in \mathbb{N}_0$; una extensión real de la fórmula requiere una interpretación continua del tiempo.

Ejemplo de crecimiento. Un capital de 600 unidades crece un ocho por ciento por año, con acumulación compuesta:

$$P(t) = 600(1.08)^t, \qquad P(3) = 600(1.08)^3 = 755.8272.$$

Para alcanzar 900 unidades en el modelo continuo interpolado, la ecuación es

$$600(1.08)^t = 900 \iff \boldsymbol{t = \frac{\ln(3/2)}{\ln(1.08)}} \approx 5.27 \text{ años.}$$

Si solo se cuenta el saldo al final de años completos, el primer año en que se alcanza o supera 900 es $t = 6$.

9.2. Modelo con base natural

Un cambio proporcional continuo se describe mediante

$$P(t) = P_0 e^{kt}, \qquad P_0 > 0,$$

con k medido en unidades inversas de tiempo. El modelo crece si $k > 0$, decrece si $k < 0$ y permanece constante si $k = 0$. Para igualar el factor anual $1 + r > 0$ se toma $k = \ln(1+r)$, puesto que $e^{kt} = (1+r)^t$.

Tiempo de duplicación. Si $k > 0$, de $P(T) = 2P_0$ resulta

$$e^{kT} = 2 \iff \boldsymbol{T_{\text{doble}} = \frac{\ln 2}{k}}.$$

Semivida. Si $k < 0$, de $P(T) = P_0/2$ resulta

$$\boldsymbol{T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{k} = \frac{\ln 2}{|k|} > 0}.$$

Por ejemplo, para $P(t) = 240(0.75)^t$, la semivida es $T_{1/2} = \ln(1/2)/\ln(0.75) \approx 2.41$ periodos. Después de tres periodos, $P(3) = 240(3/4)^3 = 101.25$.

9.3. Comparación gráfica de dos modelos

Consideremos $C(t) = 100(1.12)^t$ y $D(t) = 100(0.88)^t$, con $t \geq 0$. Comparten el dato inicial 100, pero difieren en el factor multiplicativo de cada periodo. A los cinco periodos,

$$C(5) = 100(1.12)^5 \approx 176.23, \qquad D(5) = 100(0.88)^5 \approx 52.77.$$

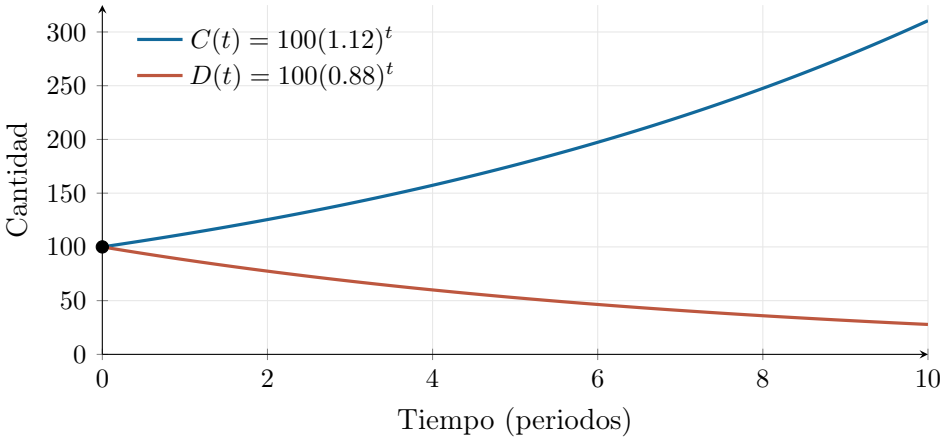


Figura 5. Una tasa porcentual fija produce cambio multiplicativo, no aditivo.

10. Lista de control para interpretar un modelo

Antes de aceptar una ecuación o una gráfica conviene comprobar los siguientes aspectos:

1. **Base y argumentos.** Toda base de logaritmo debe ser positiva y distinta de 1, y cada argumento debe ser estrictamente positivo.
2. **Equivalencias.** Al multiplicar, elevar a potencias o combinar logaritmos, deben preservarse las restricciones anteriores.
3. **Monotonía.** Una base comprendida entre 0 y 1 invierte el sentido de una desigualdad.
4. **Gráfica.** Los desplazamientos modifican asíntotas, dominios y recorridos tal como indican las fórmulas.
5. **Modelado.** La base del crecimiento compuesto debe ser positiva, las tasas deben asociarse a unidades de tiempo y los resultados deben interpretarse dentro del contexto.

11. Problemas breves de repaso, con respuesta

1. Simplificar $4^{x+1}/2^{x-2}$. *Respuesta:* 2^{x+4}, porque $4^{x+1} = 2^{2x+2}$.
2. Resolver $7^{x-1} = 49$. *Respuesta:* $x = 3$.
3. Calcular $\log_3(1/27)$. *Respuesta:* -3.
4. Resolver $\log_5(x-2) = 1$. *Respuesta:* $x = 7$, que cumple $x > 2$.
5. Determinar el dominio de $\log_2(x^2 - 9)$. *Respuesta:* $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.
6. Resolver $(1/3)^x \geq 1/27$. *Respuesta:* $x \leq 3$.
7. Resolver $\log_2(\log_3 x) = 0$. *Respuesta:* $x = 3$, pues $\log_3 x = 1$.
8. Determinar la asíntota y el dominio de $y = \ln(x+4) - 1$. *Respuesta:* $x = -4$ y $(-4, +\infty)$.

Síntesis. Las potencias modelan cambios por factores constantes; los logaritmos recuperan los exponentes y convierten productos en sumas. Su utilidad depende de respetar estrictamente la base, el dominio y el sentido de las desigualdades, tanto al calcular como al interpretar fenómenos reales.